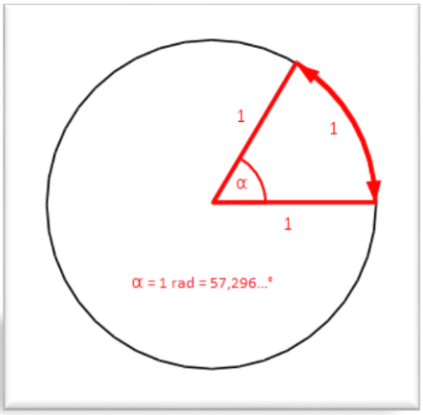
Szögfüggvények és háromszögek

Radián

A *radián* vagy *ívmérték* a síkszögek egyik mértékegysége, amelyet a rad szimbólummal jelölnek. Dimenzió nélküli mértékegység, mivel két hosszúság hányadosa. Radián: $\widehat{\alpha}$, fok: $\alpha°$

DEF: 1 radián az a szög, amely alatt a sugárral megegyező nagyságú ívhossz a középpontból látszik. Másképp: a radián sugárnyi ívhosszhoz tartozó középponti szög.



Átváltás radián és szög között:

$$\widehat{\alpha} = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi$$

$$\alpha° = \frac{\widehat{\alpha} \cdot 180°}{\pi}$$

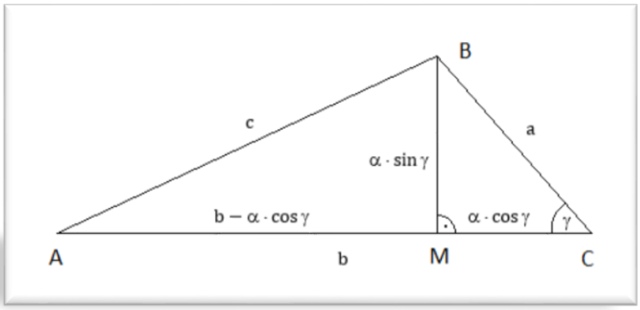
$$\pi = 3{,}14 \ldots \neq 180° \,!$$

Cos-tétel

A derékszögű háromszögekre vonatkozó Pitagorasz-tétel $(a^2 + b^2 = c^2)$ általánosítása tetszőleges általános háromszögekre. → A betűzés: az a, b, c oldallal szemközt sorban az α, β, γ szögek vannak.

TÉTEL: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$ $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$ $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

BIZ:



Az AMB_Δ -re felírjuk a Pitagoras-tételt:

$c^2 = (b - \alpha \cdot \cos\gamma)^2 + (\alpha \cdot \sin\gamma)^2 =$

$b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma + a^2 \cdot \cos^2\gamma + a^2 \cdot \sin^2\gamma =$

$b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma + a^2 \cdot (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)$

$\qquad \cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1 \rightarrow$ azonosság

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Ha $\gamma > 90°$, akkor a derékszögű háromszög a háromszögön kívülre kerül, így a b oldal felosztása módosul: $b - \alpha \cdot \cos\gamma$ helyett $\alpha \cdot \cos\gamma - b$ lesz. De mivel ennek az értéknek csak a négyzetével számoltunk, ez nem befolyásolja a bizonyítást, hisz $(b - \alpha \cdot \cos\gamma)^2 = (\alpha \cdot \cos\gamma - b)^2$

Amennyiben $\gamma = 90°$, akkor a képlet Pitagoras-tétellé egyszerűsödik, hisz $\cos\gamma = \cos 90° = 0$

Alkalmazása:

- 3 oldalból lehet számolni bármely szöget
- 2 oldalból és a közbezárt szögből lehet számolni a harmadik oldalt és a többi szöget

A tétel kifejezve a szögekre: $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ $\quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Sin-tétel

TÉTEL: Tetszőleges háromszögben az oldalak úgy aránylanak egymáshoz, mint az oldalakkal szemközti szögek sinusai.

$\Rightarrow \quad \frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad \frac{b}{a}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad \frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \frac{c}{a}=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \quad \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \quad \frac{c}{b}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

$\Rightarrow \quad a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$

BIZ: Trigonometrikus területképletet felhasználva:

$T_\Delta=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}=\frac{a\cdot c\cdot\sin\beta}{2}$

$a\cdot b\cdot\sin\gamma=a\cdot c\cdot\sin\beta$

$b\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\beta$

$\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

Alkalmazása:

- 2 oldalból és a valamelyikkel szemközti szögből lehet számolni a harmadik oldalt és a szögeket
- 2 szögből és egy oldalból lehet számolni a harmadik szöget és az oldalakat

A nagyobb oldallal szemközti szög meghatározásakor két megoldást is kaphatunk, mert egy adott (1-nél kisebb) szinuszértékhez egy hegyes- és egy tompaszög is tartozik, ezért mindig mérlegelni kell, melyik megoldás jó.

TÉTEL: Bármely hegyesszögű háromszögben egy oldal hosszának és a szemközti szög szinuszának aránya állandó. Ez az állandó a háromszög körülírt köre átmérőjének reciproka.

$\Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{1}{2R} \quad \rightarrow R$ a háromszög köréírt körének sugara

Tg-tétel

TÉTEL: $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}$

Háromszög területképletek, trigonometrikus T-képletek

$$T_\Delta=\frac{a\cdot m_a}{2}=\frac{b\cdot m_b}{2}=\frac{c\cdot m_c}{2}$$

$T_\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \rightarrow \quad s=\frac{K}{2}=\frac{a+b+c}{2}$ ← (Hérón-képlet)

$$T_\Delta=\frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}=\frac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2}=\frac{a\cdot c\cdot\sin\beta}{2}$$

A könyv készítője:

Koczog András

matematikus, biológus

info@matematikam.hu

Forrás

www.matematikam.hu	→ Matematika korrepetálás, felkészítés
www.feladat.matematikam.hu	→ Online matematika feladatok
www.feladat.matematikam.hu/letoltes	→ Letölthető matematika feladatsorok
www.konyv.matematikam.hu	→ Matematika könyvem témakörei, fejezetei
www.fb.com/matematikam.hu	→ A tanítás és matek facebook oldala
info@matematikam.hu	→ Üzenet a könyvvel és az oktatással kapcsolatban

Évek óta foglalkozom matematika oktatással - az általános iskolás korosztálytól kezdve az érettségizőkön át egészen az egyetemi szintig készítek fel diákokat a különböző megmérettetésekre. Végzettségemet tekintve okleveles matematikus és biológus vagyok, illetve webszerkesztő és hivatásos túravezető. Szerencsémre ezekre nem mint feladat, hanem mint hobbi tudok tekinteni, így továbbra is lelkesen képzem magamat ezen területeken.

2008-ban sikerült befejeznem a jegyzetet, majd 2014-ben a diplomám megszerzése után újra nekiláttam a fejezetek "modernizálásának", az egész anyagot kibővítettem, és igyekeztem még inkább használhatóvá tenni. Most már teljes bizonyossággal elmondhatom, hogy a könyv elég a közép- és az emelt szintű érettségihez is.