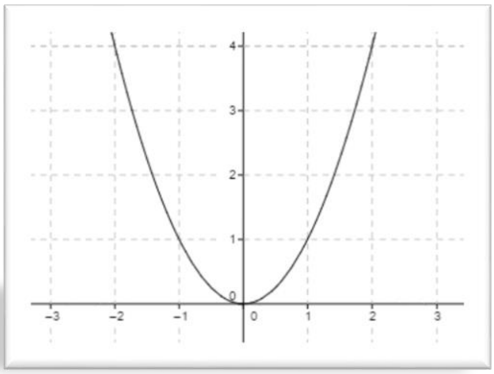
Másodfokú függvény és teljes négyzetté alakítás

Alap másodfokú függvény: $y = x^2$

Az alap másodfokú függvény egyenlete $y = x^2$, képe egy parabola. Az általános hatvány- és gyökfüggvényekről később még lesz szó (a páratlan kitevőjű hatványfüggvények képe 2 félparabola, a páros kitevőjűeké egy parabola).

Általános egyenlete $y = gx^2 + hx + i$, melyből teljes négyzetté alakítás után kapjuk meg a következő formát: $y = a\cdot(x \pm b)^2 \pm c$, ahol az a a nyújtás mértékét jelenti; negatív b érték esetén jobbra, pozitív b esetén balra toljuk a függvényt; ha a c pozitív, akkor pedig felfele, ha negatív, akkor pedig lefele. Ha az a előjele negatív, akkor a függvényt tükrözzük az x tengelyre.

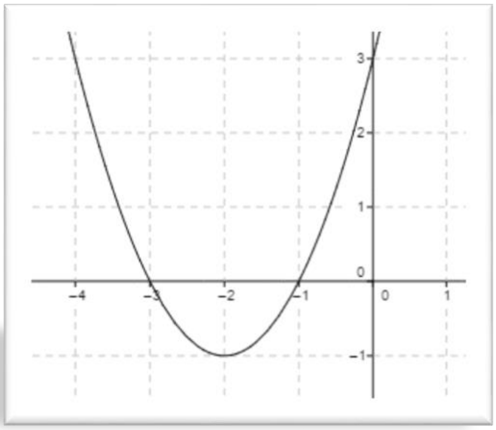
DEF: A *parabola* azon pontok mértani helye a síkban, melyek egyenlő távolságra vannak egy adott ponttól (fókuszpont, vagy gyújtópont) és egy ezen a ponton át nem haladó adott egyenestől (direktrix, vezéregyenes).



Az $f(x) = x^2$ függvény jellemzése (vagy $y = x^2$)

ÉT:	$x \in \mathbb{R}$
ÉK:	$y \in \mathbb{R}^+$
zh.:	$x = 0$
szélsőérték:	maximuma nincsen
	min hely: $x = 0$
	min érték: $y = 0$
monotonitás:	szig. mon. csökken a $]-\infty; 0]$ -on
	szig. mon. nő a $[0; \infty[$ -on
paritás:	nem páratlan, páros
konvexitás:	konvex

$y = a\cdot(x \pm b)^2 \pm c$



Az $f(x) = (x + 2)^2 - 1$ függvény jellemzése

ÉT:	$x \in \mathbb{R}$
ÉK:	$y \geq -1$
zh.:	$x_1 = -3$
	$x_2 = -1$
szélsőérték:	maximuma nincsen
	min hely: $x = -2$
	min érték: $y = -1$
monotonitás:	szig. mon. csökken a $]-\infty; -2]$ -on
	szig. mon. nő a $[-2; \infty[$ -on
paritás:	nincsen
konvexitás:	konvex

Zérushely kiszámítása: $(x + 2)^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -3 \quad x_2 = -1$

Teljes négyzetté alakítás

Teljes négyzetté alakításra legtöbbször akkor van szükségünk, mikor egy másodfokú függvényt szeretnénk ábrázolni, de néha használható a technika egyenletek megoldására is (pl. a grafikus megoldás lehetőségére gondolva).

A feladat pedig, hogy egy 0-ra redukált alakból egy zárójeles kifejezést kapjunk.

$a \cdot x^2 \pm b \cdot x \pm c$ alakból állítanánk elő a következő formát: $n \cdot (x \pm m)^2 \pm k$
$\rightarrow$ ez pedig már ábrázolható is volna függvényként

Legegyszerűbben egy mintapéldán keresztül látható a folyamat:
- első lépésként mindenképp írjuk fel a kifejezést ilyen alakba: $a \cdot x^2 \pm b \cdot x \pm c$
- a következő azonosságok valamelyikét használhatjuk:
  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Az első, könnyebbik eset, ha a másodfokú tag (x^2) együtthatója 1.

$x^2 + 10x - 3$ $\rightarrow$ észrevesszük, hogy az elsőfokú tag (x) együtthatója pozitív $(itt: 10)$, tehát ezt az azonosságot használjuk: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(x + \_\_)^2 \pm \_\_$ $\rightarrow$ a zárójelen belüli első tag mindig az ismeretlen (x) lesz, a második tag pedig az elsőfokú tag $(itt: 10)$ fele $(itt: 10/2 = 5)$

$(x+5)^2 \pm \_\_$ $\rightarrow$ végül korrigálnunk kell a konstans $(itt: -3)$ miatt. A felírt zárójeles kifejezés kibontása a következő: $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$, de nekünk ezt kellett átírnunk: $x^2 + 10x - 3$. A -3 és a $+25$ különbsége 28, így ennyit ki kell vonnunk, hogy megkapjuk az eredeti kifejezést.

$(x+5)^2 - 28$ $\rightarrow$ ellenőrzésképp: $(x+5)^2 - 28 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 - 28 = x^2 + 10x - 3$

A második, bonyolultabb eset, mikor a másodfokú tag együtthatója nem 1. Ilyenkor ezt ki kell emelnünk, mielőtt nekiállhatnánk az átalakításnak.

$-2x^2 + 8x - 10$ $\rightarrow$ tehát kiemeljük az x^2 együtthatóját $(itt: -2)$

$-2 \cdot [x^2 - 4x + 5]$ $\rightarrow$ a zárójelen belüli kifejezést alakítjuk teljes négyzetté

$x^2 - 4x + 5$ $\rightarrow$ az első esetnél tárgyalt módon alakítjuk, de mivel az elsőfokú tag (x) most negatív, a másik azonosság kell: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$x^2 - 4x + 5 \;\rightarrow\; (x - \_\_)^2 \pm \_\_ \;\rightarrow\; (x-2)^2 \pm \_\_ \;\rightarrow\; (x-2)^2 + 1$

$\rightarrow$ a kapott kifejezést visszaírjuk a példa elején felírt zárójelbe

$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$

$-2 \cdot [x^2 - 4x + 5] = -2 \cdot [(x-2)^2 + 1]$

$\rightarrow$ végezetül kibontjuk a szögletes zárójelet

. $-2 \cdot [(x-2)^2 + 1] = -2(x-2)^2 - 2$

A könyv készítője:

Koczog András

matematikus, biológus

info@matematikam.hu

Forrás

www.matematikam.hu	→ Matematika korrepetálás, felkészítés
www.feladat.matematikam.hu	→ Online matematika feladatok
www.feladat.matematikam.hu/letoltes	→ Letölthető matematika feladatsorok
www.konyv.matematikam.hu	→ Matematika könyvem témakörei, fejezetei
www.fb.com/matematikam.hu	→ A tanítás és matek facebook oldala
info@matematikam.hu	→ Üzenet a könyvvel és az oktatással kapcsolatban

Évek óta foglalkozom matematika oktatással - az általános iskolás korosztálytól kezdve az érettségizőkön át egészen az egyetemi szintig készítek fel diákokat a különböző megmérettetésekre. Végzettségemet tekintve okleveles matematikus és biológus vagyok, illetve webszerkesztő és hivatásos túravezető. Szerencsémre ezekre nem mint feladat, hanem mint hobbi tudok tekinteni, így továbbra is lelkesen képzem magamat ezen területeken.

2008-ban sikerült befejeznem a jegyzetet, majd 2014-ben a diplomám megszerzése után újra nekiláttam a fejezetek "modernizálásának", az egész anyagot kibővítettem, és igyekeztem még inkább használhatóvá tenni. Most már teljes bizonyossággal elmondhatom, hogy a könyv elég a közép- és az emelt szintű érettségihez is.

Reklám