Másodfokú egyenletek

A másodfokú egyenletek olyan egyenletek, melyekben a legmagasabb fokszámú ismeretlen hatványkitevője 2.

Másodfokú egyenletek megoldásának menete

Hogy a másodfokú egyenleteket megoldhassuk, azaz használhassuk a megoldóképletet, mindenképp a megfelelő formára kell hoznunk.

Tehát 0-ra kell redukálnunk - az egyenlet egyik oldalán 0 fog szerepelni így, a másik oldalán pedig egy $1-3$ tagból álló kifejezés, mely tartalmazza a másodfokú tagot (x^2), illetve tartalmazhat egy elsőfokú tagot (x) és egy konstanst.

A megoldóképlet használata előtti rendezett alak: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \qquad a; b; c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$

Megoldóképlet

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

BIZ: *Másodfokú egyenlet megoldóképlete:*

$ax^2 + bx + c = 0$ → teljes négyzetté alakítjuk, így elsőnek kiemelünk a-t

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$ → a második tényezőt teljes négyzetté alakítjuk

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = 0$$

$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = 0$ → $\frac{b^2-4ac}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2$

$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right) = 0$ → azonossággal szorzattá alakítom a zárójelen belüli részt

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a\left(\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right)\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right) = 0$$

$a\left(\left(x + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right) = 0$ → mivel $a \neq 0$, a zárójelen belüli rész $= 0$

$$\left(x + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0$$

$\left(x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0$ → tehát a szorzat első vagy második tagja $= 0$

$x - \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x - \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Diszkrimináns

A másodfokú egyenlet diszkriminánsának nevezzük a megoldóképlet gyökjel alatti részét

$D = b^2 - 4ac$

Ennek segítségével eldönthető, hogy az egyenletnek lesz-e, illetve hány megoldása lesz

$D < 0$ esetén: nem lesz megoldás

$D = 0$ esetén: egy megolás lesz, azaz két egybeeső megoldás

$D > 0$ esetén: két különböző megoldsát fogunk kapni

Viète-formulák

A Viète-formulák általánosságban egy polinom gyökei és együtthatói közötti összefüggéseket határozzák meg. A másodfokú egyenletre nézve a formulák a következőek:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Gyöktényezős alak

Amennyiben ismerjük a másodfokú egyenlet gyökeit és együtthatóit, akkor felírhatjuk a gyöktényezős alakjukat is:

$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Minden olyan másodfokú egyenletet, amelynek diszkriminánsa nemnegatív, tehát van megoldása, felírhatunk gyöktényezős alakban.

A megoldóképlet használata

A $6 + x^2 = -5x$ egyenlet megoldása:

I. 0-ra redukálunk:

$6 + x^2 = -5x \qquad / +5x$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

II. Megoldóképlet használata: $x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a = +1$

$b = +5$

$c = +6$

$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} =$

$x_1 = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$x_2 = \frac{-5-1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

A könyv készítője:

Koczog András

matematikus, biológus

info@matematikam.hu

Forrás

www.matematikam.hu → Matematika korrepetálás, felkészítés
www.feladat.matematikam.hu → Online matematika feladatok
www.feladat.matematikam.hu/letoltes → Letölthető matematika feladatsorok
www.konyv.matematikam.hu → Matematika könyvem témakörei, fejezetei
www.fb.com/matematikam.hu → A tanítás és matek facebook oldala
info@matematikam.hu → Üzenet a könyvvel és az oktatással kapcsolatban

Évek óta foglalkozom matematika oktatással - az általános iskolás korosztálytól kezdve az érettségizőkön át egészen az egyetemi szintig készítek fel diákokat a különböző megmérettetésekre. Végzettségemet tekintve okleveles matematikus és biológus vagyok, illetve webszerkesztő és hivatásos túravezető. Szerencsémre ezekre nem mint feladat, hanem mint hobbi tudok tekinteni, így továbbra is lelkesen képzem magamat ezen területeken.

2008-ban sikerült befejeznem a jegyzetet, majd 2014-ben a diplomám megszerzése után újra nekiláttam a fejezetek "modernizálásának", az egész anyagot kibővítettem, és igyekeztem még inkább használhatóvá tenni. Most már teljes bizonyossággal elmondhatom, hogy a könyv elég a közép- és az emelt szintű érettségihez is.