Gyökvonás

Gyökvonás alapok

TÉTEL: A gyökvonás egy matematikai művelet, a hatványozás egyik megfordított (inverz) művelete. Mikor egy számból n-edik gyököt vonunk $\sqrt[n]{a}$ $(n \in \mathbb{N}\,; n \geq 2)$, olyan számot keresünk, amelyet az n-edik hatványra emelve visszaadja az eredeti számot (ilyen szám nem mindig létezik). $\rightarrow$ $\sqrt[n]{a^n} = a$; $a \geq 0$

TÉTEL: Négyzetgyökvonás: Valamilyen nemnegatív a szám négyzetgyöke olyan nemnegatív szám, melynek négyzete az a szám.

DEF: Páros gyök: Ha a $\sqrt[n]{x}$ gyökkitevő páros szám, tehát $n = 2k$ és $(k \in \mathbb{N}^+)$
Valamely nemnegatív a szám $2k$-dik gyöke olyan nemnegatív szám, melynek a $2k$-dik hatványa a.
Negatív szám nem szerepelhet a gyökjel alatt.

DEF: Páratlan gyök: Ha a $\sqrt[n]{x}$ gyökkitevő páratlan szám, tehát $n = 2k + 1$ és $(k \in \mathbb{N}^+)$
Valamely valós a szám $2k + 1$-dik gyöke olyan valós szám, melynek a $2k + 1$-dik hatványa a.
Páratlan gyökkitevőnél van értelmezve a gyökjel alatti negatív szám.

Gyökazonosságok - definíciók és tételek

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$a; b \geq 0$	
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$a \geq 0$	$b > 0$
$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$	$a \geq 0$	$k \in \mathbb{N}$
$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$	$p; q \in \mathbb{N}$	$a > 0$
$\sqrt{a}^2 = a$		
$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$		

TÉTEL: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\quad a; b \geq 0$

BIZ: $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab \quad ab = ab \quad \rightarrow \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Gyökvonás táblázat és számológép nélkül

Többféle számolási módszer van, itt egy-egy algoritmust mutatok be a négyzetgyök és köbgyök kifejezéséhez, melyen Newton nevéhez köthetőek. A számoláshoz szükség van minden esetben egy-egy 'tippre' - ez minél pontosabb, annél kevesebbszer kell használnunk az algoritmust. A képletekben a betűk jelentése a következő:

R_{n+1} $\rightarrow$ következő becsült gyök
R_n $\rightarrow$ a legutóbbi (n. lépésben) becsült gyök (illetve a kezdeti tipp)
N $\rightarrow$ az eredeti szám, melynek a gyökét keressük

Négyzetgyök kereséséhez használható algoritmus: $R_{n+1} = \frac{R_n + \frac{N}{R_n}}{2}$

Köbgyök kereséséhez használható algoritmus: $R_{n+1} = \frac{2 \cdot R_n + \frac{N}{R_n^2}}{3}$

Példák az algoritmusok használatára:

$\sqrt{500000} =$ tipp: 700 ($7^2 = 49 \rightarrow 700^2 = 490000$)

$R_{n+1} = \frac{R_n + \frac{N}{R_n}}{2}$

$R_0 = 700$

$R_1 = \frac{700 + \frac{500000}{700}}{2} = 707{,}1428571$

$R_2 = \frac{707{,}1428571 + \frac{500000}{707{,}1428571}}{2} = 707{,}1067821$

$R_3 = \frac{707{,}1067821 + \frac{500000}{707{,}1067821}}{2} = 707{,}1067812$ $\rightarrow$ számológép pontosság

$\sqrt[3]{500000} =$ tipp: 80 ($8^3 = 512 \rightarrow 80^3 = 512000$)

$R_{n+1} = \frac{2 \cdot R_n + \frac{N}{R_n^2}}{3}$

$R_0 = 80$

$R_1 = \frac{2 \cdot 80 + \frac{500000}{80^2}}{3} = 79{,}375$

$R_2 = \frac{2 \cdot 79{,}375 + \frac{500000}{79{,}375^2}}{3} = 79{,}37005291$

$R_3 = \frac{2 \cdot 79{,}37005291 + \frac{500000}{79{,}37005291^2}}{3} = 79{,}3700526$ $\rightarrow$ számológép pontosság

$\sqrt[3]{120000} =$ pocsék tipp: 300

$R_{n+1} = \frac{2 \cdot R_n + \frac{N}{R_n^2}}{3}$

$R_0 = 300$

$R_1 = \frac{2 \cdot 300 + \frac{120000}{300^2}}{3} = 200{,}4444$

$R_2 = \frac{2 \cdot 200{,}4444 + \frac{120000}{200{,}4444^2}}{3} = 134{,}6252$

$R_3 = \frac{2 \cdot 134{,}6252 + \frac{120000}{134{,}6252^2}}{3} = 91{,}9571$

$R_4 = \frac{2 \cdot 91{,}9571 + \frac{120000}{91{,}9571^2}}{3} = 66{,}0351$

$R_5 = \frac{2 \cdot 66{,}0351 + \frac{120000}{66{,}0351^2}}{3} = 53{,}1964$

$R_6 = \frac{2 \cdot 53{,}1964 + \frac{120000}{53{,}1964^2}}{3} = 49{,}5993$

$R_7 = \frac{2 \cdot 49{,}5993 + \frac{120000}{49{,}5993^2}}{3} = 49{,}32576351$

$R_8 = \frac{2 \cdot 49{,}32576351 + \frac{120000}{49{,}32576351^2}}{3} = 49{,}32424153$

$R_9 = \frac{2 \cdot 49{,}32424153 + \frac{120000}{49{,}32424153^2}}{3} = 49{,}32424149$ $\rightarrow$ számológép pontosság

Gyökfüggvény

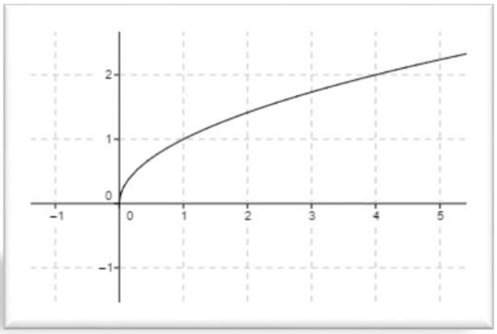
Négyzetgyök függvény

A képe egy fekvő félparabola. A többi páros kitevőjű gyökfüggvény képe is hasonló.

Általános egyenlete $y = a\sqrt{x \pm b} \pm c$, ahol az a a nyújtás mértékét jelenti; negatív b érték esetén jobbra, pozitív b esetén balra toljuk a függvényt; ha a c pozitív, akkor pedig felfele, ha negatív, akkor pedig lefele. Ha az a előjele negatív, akkor a függvényt tükrözzük az x tengelyre.

Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény jellemzése (vagy $y = \sqrt{x}$)

ÉT:	$x \in \mathbb{R}^+$
ÉK:	$y \in \mathbb{R}^+$
zh.:	$x = 0$
szélsőérték:	maximuma nincsen
	min hely: $x = 0$
	min érték: $y = 0$
monotonitás:	szig. mon. nő
paritás:	nincsen
konvexitás:	konkáv



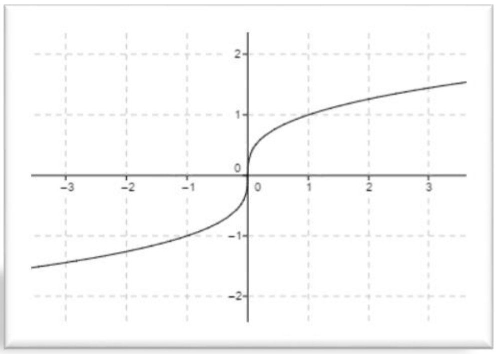
Köbgyök függvény

A képe két ellentétes állású fekvő félparabola. A többi páratlan kitevőjű gyökfüggvény képe is hasonló.

Általános egyenlete $y = a\cdot\sqrt[3]{x \pm b} \pm c$, ahol az a a nyújtás mértékét jelenti; negatív b érték esetén jobbra, pozitív b esetén balra toljuk a függvényt; ha a c pozitív, akkor pedig felfele, ha negatív, akkor pedig lefele. Ha az a előjele negatív, akkor a függvényt tükrözzük az x tengelyre.

Az $f(x) = \sqrt[3]{x}$ függvény jellemzése (vagy $y = \sqrt[3]{x}$)

ÉT:	$x \in \mathbb{R}$
ÉK:	$y \in \mathbb{R}$
zh.:	$x = 0$
szélsőérték:	nincsen
monotonitás:	szig. mon. nő
paritás:	nem páros, páratlan
konvexitás:	konvex a $]-\infty; 0]$ -on
	konkáv a $[0; \infty[$ -on



A könyv készítője:

Koczog András

matematikus, biológus

info@matematikam.hu

Forrás

www.matematikam.hu → Matematika korrepetálás, felkészítés
www.feladat.matematikam.hu → Online matematika feladatok
www.feladat.matematikam.hu/letoltes → Letölthető matematika feladatsorok
www.konyv.matematikam.hu → Matematika könyvem témakörei, fejezetei
www.fb.com/matematikam.hu → A tanítás és matek facebook oldala
info@matematikam.hu → Üzenet a könyvvel és az oktatással kapcsolatban

Évek óta foglalkozom matematika oktatással - az általános iskolás korosztálytól kezdve az érettségizőkön át egészen az egyetemi szintig készítek fel diákokat a különböző megmérettetésekre. Végzettségemet tekintve okleveles matematikus és biológus vagyok, illetve webszerkesztő és hivatásos túravezető. Szerencsémre ezekre nem mint feladat, hanem mint hobbi tudok tekinteni, így továbbra is lelkesen képzem magamat ezen területeken.

2008-ban sikerült befejeznem a jegyzetet, majd 2014-ben a diplomám megszerzése után újra nekiláttam a fejezetek "modernizálásának", az egész anyagot kibővítettem, és igyekeztem még inkább használhatóvá tenni. Most már teljes bizonyossággal elmondhatom, hogy a könyv elég a közép- és az emelt szintű érettségihez is.